АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Н. А. Хатимцов

Нелокальная задача Коши для неполного гиперболического дифференциально-операторного уравнения с постоянным по времени оператором изучалась в [1], а локальная задача Коши для полных уравнений с переменной областью определения операторов — в [2] .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На ограниченном интервале $]0,T[$ задается уравнение

$$\mathsf{L}(t)u \equiv u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A(t)u(t) + B(t)u_t(t) + B_0(t)u(t) = f(t),\ t \in]0,T[, \quad (1)$$

при нелокальных начальных условиях

$$\begin{aligned} &l_0 u \equiv u(0) - \mu\, u(T) = \varphi, \\ &l_1 u = u_t(0) - \mu\, u_t(T) = \psi,\ |\mu| < 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_t(t)$, $u_{tt}(t)$ обозначают соответственно первую и вторую производные по времени функции $u(t)$.

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ операторные коэффициенты $A(t): H \supset D(A(t)) \to H$ и $A_1(t): H \supset D(A_1(t)) \to H$ – линейные неограниченные операторы с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(A_1(t))$, $t \in [0,T]$.

При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A(t)$ на множестве $D(A(t))$ самосопряжены и положительно-определены в H.

При всех $t \in [0,T]$ ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$ к операторам $A(t)$ сильно непрерывны по t в H, имеют по t в H ограниченную сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in B([0,T], \mathcal{L}(H))$ и

$$-\left(\left(dA^{-1}(t)/dt\right)g, g\right) \le c_1\left(A^{-1}(t)g, g\right)\ \forall g \in H,\ c_1 \ge 0. \quad (3)$$

Области $D\left(A(t)\right) \subset D\left(A_1(t)\right)$ при всех $t \in]0,T[$, операторы $A_1(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$, где $A^{-1/2}(t)$ – обратные операторы квадратным корням $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ и выполняется неравенство

$$-\mathrm{Re}\big(A_1(t)g,g\big)\le c_2|g|^2 \quad \forall g\in D(A(t)),\ \ c_2\ge 0. \qquad (4)$$

Выведем априорную оценку сильных решений этой задачи.

2. ВЫБОР ПРОСТРАНСТВ

Задача (1)–(2) порождает линейный неограниченный оператор $L\equiv\{\mathrm{L}(t),l_0,l_1\}:E\supset D(L)\to F$ с плотной областью определения

$$D(L)=\{u\in\mathrm{H}:u\in D(A(t)),u_t\in D(A_1(t))\,\forall t\in]0,T[;u_t,u_{tt},A(t)u,A_1(t)u_t\in\mathrm{H}\},$$

где $\mathrm{H}=L_2(]0,T[,H)$. Пространством сильных решений задачи Коши (1)–(2) будет банахово пространство E – замыкание множества гладких решений, которыми являются функции из $D(L)$, по норме

$$\|u\|_E=\left(1-|\mu|^2\right)\left(1+|\mu|^2\right)^{-1}\left[\sup_{0<t<T}\left(|u_t(t)|^2+\left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right)\right]^{1/2}.$$

Пространством данных $\mathrm{F}=\{f(t),\varphi,\psi\}$ задачи Коши (1)–(2) будет гильбертово пространство $F=\mathrm{H}\times W(0)\times H$ с эрмитовой нормой

$$\|\mathrm{F}\|_F=\left[\|f\|_0^2+(4T)^{-1}\left(|A^{1/2}(0)\varphi|^2+|\psi|^2\right)\right]^{1/2},\ \|f\|_0^2=\int_0^T|f|^2\,dt,$$

где $W(t)$ – гильбертовы пространства, полученные наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A^{1/2}(t)$ эрмитовыми нормами $|v|_{(t)}=|A^{1/2}(t)v|,\ t\in[0,T]$. Стандартным образом доказывается

Лемма 1. *Если выполняется условие A1, множество* $\tilde{D}(L)=\{v\in D(L):v\in D(A_1^*(t))\,\forall t\in[0,T];A_1^*(t)v\in\mathrm{H}\}$ *плотно в* H *и, для операторов* $B(t)$ *и* $B_0(t)$ *верны неравенства*

$$|B(t)g|\le c_6|g|\ \ \forall g\in H,\quad |B_0(t)v|\le c_7\left|A^{1/2}(t)v\right|\ \forall v\in D\big(A(t)\big),\ c_6,c_7>0, \qquad (5)$$

то для оператора L *существует сильное замыкание* $\overline{L}:E\supset D(\overline{L})\to F$.

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Выведем априорную оценку сильных решений этой задачи Коши.

Теорема 1. *Если выполняются условия A1-A3, для операторов* $B(t)$ *и* $B_0(t)$ *верны неравенства (5), справедливо неравенство*

$$\left|A^{1/2}(0)v\right| \le c_8 \left|A^{1/2}(T)v\right| \ \forall v \in W(T) \tag{6}$$

и множество $\tilde{D}(L)$ *плотно в* H*, то для всех* $T < 1/(\gamma c_9)$*,* $|\mu|^2 < \min\left\{(2c_8 - 1)^{-1}, (1-\gamma c_9 T)(1+\gamma c_9 T)^{-1}\right\}$ *при всех* $c_8 > 1$ *и* $|\mu|^2 < (1-\gamma c_9 T)(1+\gamma c_9 T)^{-1}$ *при всех* $c_8 \in (0,1]$*, где* $\gamma > 4$ *и* $c_9 = \min\limits_{\rho>0} \max\left\{2c_2 + 2c_6 + \rho^{-1}c_7, (c_1 + \rho c_7)/2\right\}$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_E^2 \le 2\gamma^2 T(\gamma-4)^{-1} \max\left\{1, \left(1-|\mu|^2\right)\Big/\left(1+(1-2c_8)|\mu|^2\right)\right\} \|Lu\|_F^2 \ \ \forall u \in D(\bar{L}).$$

Доказательство проведем с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Известны их следующие свойства из [2]:

Норма $\left\|A_\varepsilon^{-1}(t)\right\|_{\mathrm{L}(H)} \le 1 \ \ \forall t \in [0,T]$ и $A_\varepsilon^{-1}(t)g \in D(A(t)) \ \ \forall g \in H$.

Равномерно по *t* при $\varepsilon \to 0$ норма $\left|A_\varepsilon^{-1}(t)g - g\right| \to 0 \ \ \forall g \in H$.

При почти всех $t \in]0,T[$ в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$ и для $\forall \varepsilon > 0$ верны равенства

$$dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt = \varepsilon A(t) A_\varepsilon^{-1}(t)\left(dA^{-1}(t)/dt\right) A(t) A_\varepsilon^{-1}(t),$$

$$d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\left(dA^{-1}(t)/dt\right)A(t)A_\varepsilon^{-1}(t). \tag{7}$$

Интегрируя по частям по *t* от 0 до τ, для $\forall u \in D(L)$ имеем равенство

$$\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\right)\Big|_{t=0}^{t=\tau} = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u_t\right)dt + \int_0^\tau \left(\left[d\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\right)/dt\right]u, u\right)dt.$$

Здесь пользуемся равенством (7), оценкой (3),затем переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ и имеем неравенство

$$\left(A(t)u,u\right)\Big|_{t=\tau} \le \left(A(t)u,u\right)\Big|_{t=0} + 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau \left(A(t)u, u_t\right)dt + c_1\int_0^\tau \left(A(t)u,u\right)dt. \tag{8}$$

Интегрируя по частям по *t* от 0 до τ, для $\forall u \in D(L)$ имеем равенство

$$\left|u_t\right|^2\Big|_{t=\tau} = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau \left(u_{tt}, u_t\right)dt + \left|u_t\right|^2\Big|_{t=0}. \tag{9}$$

Складываем неравенство (8) и равенство (9), используем оценку (4), неравенства (5) и приходим к соотношению

$$\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 + \left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=\tau} \le 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau \left|\left(\mathrm{L}(t)u, u_t\right)\right|dt + \left(c_1 + \rho c_7\right)\int_0^\tau \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt +$$

$$+\left(2c_2+2c_6+\rho c_7\right)\int_0^\tau \left|u_t\right|^2 dt+\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=0}. \qquad (10)$$

Аналогично для отрезка $[\tau,T]$ вместо отрезка $[0,\tau]$ находим неравенство

$$-\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=\tau}\le 2\,\mathrm{Re}\int_\tau^T\left|\left(\mathsf{L}(t)u,u_t\right)\right|dt+\left(c_1+\rho c_7\right)\int_\tau^T\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt+,$$

$$+\left(2c_2+2c_6+\rho c_7\right)\int_\tau^T\left|u_t\right|^2 dt-\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=T}.$$

Умножаем это неравенство на $\left(1+\left|\mu\right|^2\right)/2$, складываем результат с неравенством (10), пользуемся оценкой (6) и имеем неравенство

$$\left(1-\left|\mu\right|^2\right)\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|du/dt\right|^2\right)\Big|_{t=\tau}\le 2\left(1+\left|\mu\right|^2\right)\Big[2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left|\left(\mathsf{L}(t)u,u_t\right)\right|dt+$$

$$+\left(c_1+\rho c_7\right)\int_0^T\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt+\left(2c_2+2c_6+\rho c_7\right)\int_0^T\left|u_t\right|^2 dt\Big]+ \qquad (11)$$

$$+2\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=0}-\left(1+\left|\mu\right|^2\right)\left(c_8^{-1}\left|A^{1/2}(0)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=T}.$$

Лемма 2. *Пусть для некоторой функции g со значениями в H выполняется равенство* $g\,|_{t=0}-\mu g\,|_{t=T}=\varphi$, *тогда для* $\left|\mu\right|^2<1$ *при* $\alpha\in(0,1]$ *и для* $\left|\mu\right|^2<1/\left(2\alpha-1\right)$ *при* $\alpha>1$ *справедливо неравенство*

$$\left(1+\left(1-2\alpha\right)\left|\mu\right|^2\right)\left(\left|g(0)\right|^2-\left(1+\left|\mu\right|^2\right)\left(2\alpha\right)^{-1}\left|g(T)\right|^2\right)\le\left(1+\left|\mu\right|^2\right)\left|\varphi\right|^2. \qquad (12)$$

Применяем оценку (12) леммы 2 в правой части неравенства (11), проводим элементарные оценки и при $\delta=\delta_0=\left(1-|\mu|^2\right)/\left(\gamma T\left(1+|\mu|^2\right)\right)$ приходим к неравенству

$$\gamma T\delta_0\left(\left|A^{1/2}(t)u\right|^2+\left|u_t\right|^2\right)\Big|_{t=\tau}\le 2\delta_0^{-1}\sigma\left\|Lu\right\|_0^2+4\delta_0\left(\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2+\left\|u_t\right\|_0^2\right), \qquad (13)$$

так как из предположений теоремы 1 следует, что $c_9\le\delta_0$.

Проинтегрируем последнее соотношение по τ от 0 до T и найдем оценку

$$\delta_0\left(\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2+\left\|u_t\right\|_0^2\right)\le 2\left(\gamma-4\right)^{-1}\delta_0^{-1}\sigma\left\|Lu\right\|_F^2. \qquad (14)$$

В неравенстве (13) берем точную верхнюю грань по всем $\tau \in [0,T]$ и с помощью ценки (14) выводим неравенство

$$T\delta_0 \left(1+|\mu|^2\right)^2 \left(1-|\mu|^2\right)^{-2} \|u\|_E^2 \le 2(\gamma-4)^{-1}\delta_0^{-1}\sigma\|Lu\|_F^2,$$

которое с гладких решений $u \in D(L)$ распространяем предельным переходом на все сильные решения $u \in D(\overline{L})$. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30—35.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференциальные уравнения 1992. Т.28. № 5. С.873 —885.

ПОЛНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. П. Ходос

Сингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка изучались в случае постоянных областей определения в [1] и переменных областей определения и главной части уравнения в [2, 3]. В настоящей работе изучается корректность в сильном смысле уравнения с младшей частью и переменными областями определения операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть H – гильбертово пространство, норму и скалярное произведение в котором обозначим $|\cdot|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно. На ограниченном интервале $]0,T[$ вещественной прямой рассматривается сингулярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\frac{B(t)}{t}\frac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)+B_1(t)\frac{du(t)}{dt}+A_1(t)u(t)=f(t),\ t\in\left]0,T\right[,\quad(1)$$

с однородными начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=0, \tag{2}$$